

ポイント 005 数値計算

(1) 線形代数

線形代数は、画像処理や統計などコンピュータ上で活用されている。

(2) 行列

行列は、連立方程式を簡潔に記述する目的で考え出されたものである。

下図は、連立方程式を行列に置き換えた例である。

$$\begin{cases} 3x+4y=30 \\ 5x+6y=48 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \end{pmatrix}$$

行列を構成する値（上図では「3」や「x」など）を**スカラ**という。

(3) 行列の表記

明確な値が決まっていない行列を表現する際には、次のように、

$$a_{ij} \quad \text{※ (i : 行番号, j : 列番号)}$$

の形式で表現する。

例) 3行3列の行列Aを表現

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

また、行と列の数が同じ行列を、**正方行列**という。

(4) ベクトル

行列において、行方向にスカラが1行だけ並んでいるものを**行ベクトル**、列方向にスカラが並んでいるものを**列ベクトル**という。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

行ベクトル 列ベクトル

(5) 行列の和・差

行数と列数が同じ行列同士では、和や差を求めることができる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 6 & 12 & 10 \\ 11 & 17 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(6) 行列の積

1 つ目の行列の列数と， 2 つ目の行列の行数が同じ場合， 行列の積を求めることができる。

例) 2 行 2 列の 2 つの行列の積

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} & 2) \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\
 3) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{5} \quad \textcircled{6} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} & 4) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{7} \quad \textcircled{8} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}
 \end{array}$$

(7) 単位行列

正方行列において，左上から右下までの対角線上にあるスカラが全て 1，それ以外が 0 のものを単位行列という。単位行列には，他の行列と掛け算を行った結果が，元の値と変わらないという性質がある。

例) 3 行 3 列の行列と 3 行 3 列の単位行列の積

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 5 \times 0 + 4 \times 0 & 2 \times 0 + 5 \times 1 + 4 \times 0 & 2 \times 0 + 5 \times 0 + 4 \times 1 \\ 4 \times 1 + 8 \times 0 + 7 \times 0 & 4 \times 0 + 8 \times 1 + 7 \times 0 & 4 \times 0 + 8 \times 0 + 7 \times 1 \\ 6 \times 1 + 9 \times 0 + 5 \times 0 & 6 \times 0 + 9 \times 1 + 5 \times 0 & 6 \times 0 + 9 \times 0 + 5 \times 1 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(8) 乗算回数の低減

一般的なコンピュータでは，加減算に比べ，乗除算は計算時間が長くなる。特に，高次多項式の計算は，計算式をそのままプログラムに記述するよりも，乗除算の計算回数を最小になるように計算式を変形した方が計算効率を高めることができる。

例) 計算式 “ $y = x^{10} + ax^9 + bx^8 + cx^7 + \dots + hx^2 + ix + j$ ” を乗算の回数が最小になるように変形する。

$$\begin{aligned}
 y &= x(x^9 + ax^8 + bx^7 + cx^6 + \dots + i) + j \\
 &= x(x(x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + \dots + h) + i) + j \\
 &= x(x(x(x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + \dots + g) + h) + i) + j \\
 &\quad \vdots \\
 &= x(x(x(x(x(x(x(x(x+a) + b) + c) + d) + e) + f) + g) + h) + i) + j
 \end{aligned}$$

この例の場合，元の計算式では，乗算を 64 回，加算を 10 回行う必要であるが，上記のように計算式を変形することで，乗算は 9 回，加算は 10 回となる。

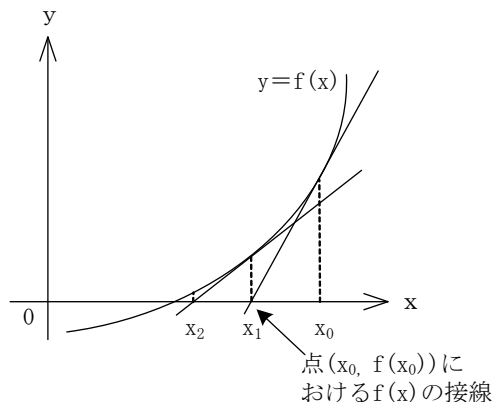
1 基礎理論

(9) 数値解析

コンピュータを用いて、数学の関数、微分方程式や積分などの解（近似解）を求めること。

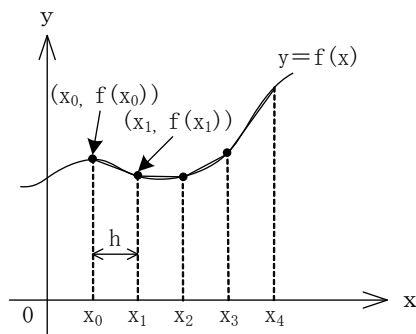
① ニュートン・ラフソン法

初めに、点 $(x_0, f(x_0))$ における $f(x)$ の接線と x 軸の交点 $(x_1, 0)$ を求める。次に、点 $(x_1, f(x_1))$ における $f(x)$ の接線と x 軸の交点 $(x_2, 0)$ を求める。この手順を繰り返し、関数 $y=f(x)=0$ となる x の値を近似的に求める方法である。



② 台形法

関数の積分値の近似値を求める数値積分法。被積分区間を間隔 h で n 等分し、それぞれの x 座標に対する $f(x)$ の値 $(f(x_0) \sim f(x_{n-1}))$ を求める。次に、隣接する2点（右図では、 $(x_0, f(x_0))$ と $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ など）を直線で結び、上底 $f(x_n)$ 、下底 $f(x_{n+1})$ 、高さ h の台形と見なし、被積分区間の積分値を各台形の面積の総和で近似する方法である。元の関数 $f(x)$ が曲線の場合は、直線で補間するので誤差が生じる。



③ シンプソン法

被積分区間を $2n$ 等分し、元の関数値三つを二次曲線（二次関数）で補間（二次補間）することで、被積分区間の積分値の近似値を求める数値積分法。台形法は、被積分区間を n 等分し、元の関数値二つを直線で補間（一次補間）するので、台形法より精度は高くなる。

練習問題 1-1-5

数値積分の手法の一つであるシンプソン法に関する記述として、適切なものはどれか。

- ア 関数 $y=f(x)$ の区間 $[a, b]$ を n 等分し、 n を大きくすることによって元の関数曲線を直線で近似して、面積の誤差を小さくする。
- イ 近似解が求まったかどうかの判定は、区間の長さ $|x_1 - x_2|$ が収束判定値 ε より小さくなったかで決める。
- ウ 高次方程式の近似根が分かっているとき、近似根が収束判定値より小さくなるまで繰り返し修正していき、真の根を求める。
- エ 被積分区間を偶数等分し、元の関数曲線を放物線で近似して面積を計算する。

【解答エ】

シンプソン法は、曲線で囲まれた面積を求める（数値積分）ときの代表的な手法の一つで、被積分区間を偶数等分し、3点を二次曲線（放物線）に近似して面積を計算する。曲線を直線で近似する台形法に比べ、誤差が小さい。

- ア：数値積分の代表的な手法の一つである台形法に関する記述である。
- イ：高次方程式の数値解法の中で最も簡単な二分法に関する記述である。
- ウ：高次方程式の数値解法であるニュートン法に関する記述である。

数値解析は、あくまで近似計算である。ほとんどの場合、実数を扱うので、ほぼ必ず丸め誤差が生じる。さらに、台形法やシンプソン法で被積分区間を分割するとき、極端に小さく分割すると丸め誤差が累積し、逆に精度が下がることがある。

また、数値解析には、このほかにも幾つかの方法がある。

- ・オイラー法

1階常微分方程式（未知関数とその導関数からなる等式で定義される方程式である微分方程式の一種）の近似解を求める手法。

- ・カハン法（カハンのアルゴリズム）

有限精度の浮動小数点数の総和を計算する際の誤差を最小化する数値解析のアルゴリズム。

- ・モンテカルロ法

シミュレーションや数値計算を（擬似）乱数を用いて行う手法の総称。